



TITLE:

バーンサイド環の一般化とその応用 (有限群とその表現, 頂点作用素代数, 組合せ論の研究)

AUTHOR(S):

竹ヶ原, 裕元

CITATION:

竹ヶ原, 裕元. バーンサイド環の一般化とその応用 (有限群とその表現, 頂点作用素代数, 組合せ論の研究). 数理解析研究所講究録 2012, 1811: 60-77

ISSUE DATE:

2012-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/194502>

RIGHT:

バーンサイド環の一般化とその応用

竹ヶ原 裕元

室蘭工業大学

有限群の指標環における Brauer の誘導定理を一般化する手法として, Boltje [4] により導入されたマッキー関手の $+$ 構成の理論がある. マッキー関手の $+$ 構成はバーンサイド環の一般化であるが, これまで, バーンサイド環の理論における第 1 基本定理は一般化されていなかった. 本報告では, $+$ 構成に関する第 1 基本定理を示し, その応用として Brauer の誘導定理の一般化に関する結果を述べる. さらに, 有限群の twisted quantum double の表現論における Brauer の誘導定理の一般化を紹介する.

1 マッキー関手の $+$ 構成

共役関手, 制限関手, マッキー関手, グリーン関手を定義する.

定義 1.1 ([4]) k を単位元をもつ可換環とする.

(1) k 上 G の共役関手とは, k 加群の族 $A(H)$, $H \leq G$ と k 準同型の族

$$\text{con}_H^g : A(H) \rightarrow A({}^gH), \quad H \leq G, \quad g \in G,$$

共役写像, の組 $A = (A, \text{con})$ で, 次の公理を満たすものをいう.

$$(G.1) \quad \text{con}_{rH}^g \circ \text{con}_H^r = \text{con}_H^{gr}, \quad \text{con}_H^h = \text{id}_{A(H)},$$

ここで $H \leq G$, $g, r \in G$, $h \in H$.

(2) k 上 G の制限関手とは, 共役関手 (A, con) と k 準同型の族

$$\text{res}_K^H : A(H) \rightarrow A(K), \quad K \leq H \leq G,$$

制限写像, から成る組 $A = (A, \text{con}, \text{res})$ で, 次の公理を満たすものをいう.

$$(G.2) \quad \text{res}_L^K \circ \text{res}_K^H = \text{res}_L^H, \quad \text{res}_H^H = \text{id}_{A(H)},$$

$$(G.3) \quad \text{con}_K^g \circ \text{res}_K^H = \text{res}_{gK}^{gH} \circ \text{con}_H^g,$$

ここで $L \leq K \leq H \leq G$, $g \in G$.

(3) k 上 G のマッキー関手とは, 制限関手 $(A, \text{con}, \text{res})$ と k 準同型の族

$$\text{ind}_K^H : A(K) \rightarrow A(H), \quad K \leq H \leq G,$$

誘導写像, から成る組 $A = (A, \text{con}, \text{res}, \text{ind})$ で, 次の公理を満たすものをいう.

$$(G.4) \quad \text{ind}_K^H \circ \text{ind}_L^K = \text{ind}_L^H, \quad \text{ind}_H^H = \text{id}_{A(H)},$$

$$(G.5) \quad \text{con}_H^g \circ \text{ind}_K^H = \text{ind}_{gK}^{gH} \circ \text{con}_K^g,$$

(G.6) (マッキー公理)

$$\text{res}_K^H \circ \text{ind}_U^H = \sum_{KhU \in K \setminus H/U} \text{ind}_{K \cap {}^hU}^K \circ \text{res}_{K \cap {}^hU}^{hU} \circ \text{con}_U^h,$$

ここで $L \leq K \leq H \leq G, U \leq H, g \in G$.

(4) k 上 G のグリーン関手とは, マッキー関手 $A = (A, \text{con}, \text{res}, \text{ind})$ で, $A(H), H \leq G$, が k 代数, $\text{con}_H^g, \text{res}_K^H$, ここで $K \leq H \leq G, g \in G$, が環準同型であつて, さらに次の公理を満たすものをいう.

(G.7) (フロベニウス公理)

$$\sigma \cdot \text{ind}_K^H(\tau) = \text{ind}_K^H(\text{res}_K^H(\sigma) \cdot \tau), \quad \text{ind}_K^H(\tau) \cdot \sigma = \text{ind}_K^H(\tau \cdot \text{res}_K^H(\sigma)),$$

ここで $K \leq H, \sigma \in A(H), \tau \in A(K)$.

以下, 文献 [4] に従つて, ‘上 + 構成’ と ‘下 + 構成’ を定義する. A を k 上 G の共役関手とし, 各 $H \leq G$ に対して,

$$M(H) = \prod_{U \leq H} A(U)$$

とおく. このとき, $M(H)$ は作用が

$$h.(x_U)_{U \leq H} = (\text{con}_U^h(x_U))_{hU \leq H}, \quad h \in H, (x_U)_{U \leq H} \in M(H)$$

で与えられる kH 加群である. 上 + 構成と呼ばれるマッキー関手

$$A^+ = (A^+, \text{con}^+, \text{res}^+, \text{ind}^+)$$

の構成は, 次で与えられる.

$$A^+(H) = \{(x_U)_{U \leq H} \in M(H) \mid h.(x_U)_{U \leq H} = (x_U)_{U \leq H}, \forall h \in H\},$$

$$\text{con}_H^{+g}((x_U)_{U \leq H}) = (\text{con}_H^g(x_U))_{gU \leq gH},$$

$$\text{res}_K^{+H}((x_U)_{U \leq H}) = (x_U)_{U \leq K},$$

$$\text{ind}_K^{+H}((y_U)_{U \leq K}) = \sum_{hK \in H/K} (c_L^h)_{L \leq H},$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x_U)_{U \leq H} \in A^+(H)$, $(y_U)_{U \leq K} \in A^+(K)$,

$$c_L^h = \begin{cases} \text{con}_U^h(y_U), & L = {}^hU, U \leq K \text{ のとき,} \\ 0, & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

各 $H \leq G$ に対して, $I(M(H))$ を H が $M(H)/I(M(H))$ に自明に作用するような最小の kH 部分加群とする. A が制限関手のとき, 下 + 構成と呼ばれるマッキー関手

$$A_+ = (A_+, \text{con}_+, \text{res}_+, \text{ind}_+)$$

の構成は, 次で与えられる.

$$\begin{aligned} A_+(H) &= M(H)/I(M(H)), \\ \text{con}_{+H}^g(\overline{(x_U)_{U \leq H}}) &= \overline{(\text{con}_H^g(x_U))_{gU \leq gH}}, \\ \text{res}_{+K}^H(\overline{(x_U)_{U \leq H}}) &= \sum_{U \leq H} \sum_{KhU \in K \setminus H/U} \overline{(d_L^h)_{L \leq K}}, \\ \text{ind}_{+K}^H(\overline{(y_U)_{U \leq K}}) &= \overline{(y'_U)_{U \leq H}}, \end{aligned}$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x_U)_{U \leq H} \in M(H)$, $(y_U)_{U \leq K} \in M(K)$,

$$d_L^h = \begin{cases} \text{res}_{K \cap {}^hU}^{{}^hU} \circ \text{con}_U^h(x_U) & L = K \cap {}^hU \text{ の場合,} \\ 0 & \text{その他の場合,} \end{cases}$$

$$y'_U = \begin{cases} y_U & U \leq K \text{ の場合,} \\ 0 & \text{その他の場合.} \end{cases}$$

A を k 上 G の制限関手とする. $K \leq H \leq G$, $\sigma \in A(K)$ に対して,

$$[K, \sigma] = \overline{(\delta_{KU}\sigma)_{U \leq H}} \in A_+(H)$$

とおく. $A(H)$, $H \leq G$, が k 代数であり, con_H^g , res_K^H , ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, が環準同型るとき, $A_+(H)$ における積が

$$[K, \sigma] \cdot [U, \tau] = \sum_{KhU \in K \setminus H/U} [K \cap {}^hU, \text{res}_{K \cap {}^hU}^K(\sigma) \cdot \text{res}_{K \cap {}^hU}^{{}^hU} \circ \text{con}_U^h(\tau)]$$

により定義される. このとき, A_+ はグリーン関手である.

各 $H \leq G$ に対して, マーク準同型 $\rho_H^A: A_+(H) \rightarrow A^+(H)$ は

$$\rho_H^A(\overline{(x_U)_{U \leq H}}) = \sum_{U \leq H} \left(\sum_{hU \in H/U, K \leq {}^hU} \text{res}_K^{{}^hU} \circ \text{con}_U^h(x_U) \right)_{K \leq H}, \quad (x_U)_{U \leq H} \in M(H)$$

により定義され, 写像 $\eta_H^A : A^+(H) \rightarrow A_+(H)$ は

$$\eta_H^A((y_K)_{K \leq H}) = \sum_{K \leq H} \sum_{U \leq K} |U| \mu(U, K) [U, \text{res}_U^K(y_K)], \quad (y_K)_{K \leq H} \in A^+(H),$$

ここで μ は G の部分群束のメービウス関数 ([1] 参照), により定義される.

命題 1.2 ([4]) A を k 上 G の制限関手とする. このとき, 各 $H \leq G$ に対して,

$$\eta_H^A \circ \rho_H^A = |H| \text{id}_{A_+(H)}, \quad \rho_H^A \circ \eta_H^A = |H| \text{id}_{A^+(H)}$$

が成り立つ.

2 斜マッキー関手

以下, S を G モノイドとし, $\text{Stab}(G; S) = \{G_s \mid s \in S\}$, ここで G_s は s の安定化群, とおく. k 上 $\text{Stab}(G; S)$ の制限束とは, 斜共役写像と呼ばれる k 準同型の族

$$\text{con}_{sH}^g : A_s(H) \rightarrow A_{gs}(^gH), \quad s \in S, H \leq G_s, g \in G$$

を備えた k 上 $G_s, s \in S$ の制限関手の集まり $A = \{A_s = (A_s, \text{con}, \text{res})\}_{s \in S}$ で, 次の公理を満たすものをいう.

$$(C.0) \quad \text{con}_{sH}^t = \text{con}_H^t,$$

$$(C.1) \quad \text{con}_{r_s}^g \circ \text{con}_{sH}^r = \text{con}_{sH}^{gr},$$

$$(C.2) \quad \text{con}_{sK}^g \circ \text{res}_K^H = \text{res}_{gK}^{^gH} \circ \text{con}_{sH}^g,$$

ここで $s \in S, K \leq H \leq G_s, g, r \in G, t \in G_s$. この場合, A は $A_s, s \in S$ で構成される制限束と呼ばれる. k 上 G の制限関手 A は自然に $A_s := A = (A, \text{con}, \text{res}), s \in S$ で構成される制限束と考えられる.

A を k 上 $\text{Stab}(G; S)$ の制限束とする. k 上 G の制限関手

$$A_S = (A_S, \text{con}_S, \text{res}_S)$$

を

$$A_S(H) = \left\{ (x(s))_{s \in S} \in \prod_{s \in S} A_s(H_s) \mid x(s) = 0, \forall s \in S - C_S(H) \right\},$$

$$\text{con}_S^g((x(s))_{s \in S}) = (\text{con}_{sH}^g(x(s)))_{s \in S},$$

$$\text{res}_S^H((x(s))_{s \in S}) = (\text{res}_{K_s}^{H_s}(x(s)))_{s \in S},$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x(s))_{s \in S} \in A_S(H)$, により定義し, A の上の斜制限関手と呼ぶ. A が制限関手で, $A(H)$, $H \leq G$, が k 代数, $\text{con}_H^g, \text{res}_K^H$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, が環準同型のとき, $A_S(H)$ における積が

$$(x(s))_{s \in S}(y(t))_{t \in S} = \left(\sum_{(s,t) \in C_S(H) \times C_S(H), st=r} x(s)y(t) \right)_{r \in S}$$

により与えられる. このとき, A_{S+} はグリーン関手である.

k 上 $\text{Stab}(G; S)$ のマッキー束とは, 斜共役写像と呼ばれる k 準同型の族

$$\text{con}_{sH}^g : X_s(H) \rightarrow X_{gs}(^gH), \quad s \in S, \quad H \leq G_s, \quad g \in G$$

を備えた k 上 G_s , $s \in S$ のマッキー関手の集まり $X = \{X_s = (X_s, \text{con}, \text{res}, \text{ind})\}_{s \in S}$ で, 公理 (C.0)–(C.2) と次の公理を満たすものをいう.

$$(C.3) \quad \text{con}_{sH}^g \circ \text{ind}_K^H = \text{ind}_{gK}^{gH} \circ \text{con}_{sK}^g,$$

ここで $s \in S$, $K \leq H \leq G_s$, $g \in G$. この場合, X は X_s , $s \in S$ で構成されるマッキー束と呼ばれる. k 上 G のマッキー関手 X は自然に $X_s := X = (X, \text{con}, \text{res}, \text{ind})$, $s \in S$ で構成されるマッキー束と考えられる.

X を k 上 $\text{Stab}(G; S)$ のマッキー束とする. k 上 G のマッキー関手

$$X_S = (X_S, \text{con}_S, \text{res}_S, \text{ind}_S)$$

を

$$X_S(H) = \left\{ (x(s))_{s \in S} \in \prod_{s \in S} X_s(H_s) \mid \text{con}_{sH_s}^h(x(s)) = x(^h s), \quad \forall h \in H \right\},$$

$$\text{con}_{sH}^g((x(s))_{s \in S}) = (\text{con}_{sH_s}^g(x(s)))_{s \in S},$$

$$\text{res}_S^H((x(s))_{s \in S}) = (\text{res}_{K_s}^{H_s}(x(s)))_{s \in S},$$

$$\text{ind}_S^H((y(s))_{s \in S}) = \left(\sum_{H_s h K \in H_s \backslash H/K} \text{ind}_{(^h K)_s}^{H_s} \circ \text{con}_{h^{-1}sK_{h^{-1}s}}^h(y(^{h^{-1}}s)) \right)_{s \in S},$$

ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, $(x(s))_{s \in S} \in X_S(H)$, $(y(s))_{s \in S} \in X_S(K)$, により定義し ([14] 参照), X の上の斜マッキー関手とよぶ. X がマッキー関手のとき, この構成は Dress 構成と呼ばれる. X がグリーン関手のとき, $X_S(H)$ における積が

$$(x(s))_{s \in S}(y(t))_{t \in S} = \left(\sum_{(s,t) \in \overline{H_r} \backslash S \times \overline{S}, st=r} \text{ind}_{H_{s,t}}^{H_r}(\text{res}_{H_{s,t}}^{H_s}(x(s)) \cdot \text{res}_{H_{s,t}}^{H_t}(y(t))) \right)_{r \in S},$$

ここで $H_{s,t} = H_s \cap H_t$, により与えられ, X_S はグリーン関手となる ([5, 14] 参照).

命題 2.1 ([16]) A を k 上 G の制限関手とする. このとき, マッキー関手 A_{S+} は A_{+S} と同型である. すなわち, k 準同型の族 $f_H : A_{S+}(H) \rightarrow A_{+S}(H)$, $H \leq G$, が存在して, $f_{gH} \circ \text{con}_{S+H}^g = \text{con}_{+SH}^g \circ f_H$, $f_K \circ \text{res}_{S+K}^H = \text{res}_{+SK}^H \circ f_H$, $f_H \circ \text{ind}_{S+K}^H = \text{ind}_{+SK}^H \circ f_K$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, となっている.

k 上 G の制限関手 $\underline{k} = (\underline{k}, \text{con}, \text{res})$ を $\underline{k}(H) = k$, $H \leq G$, $\text{con}_H^g = \text{res}_K^H = \text{id}_k$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, により定義する. $k = \mathbb{Z}$ のとき, $\underline{\mathbb{Z}}_+$ はバーンサイド環関手 Ω ([18] 参照) と同一視され, さらに, $\underline{\mathbb{Z}}_{S+}$ は斜バーンサイド環関手 $\text{C}\Omega(-, S)$ ([14] 参照) と同一視される.

系 2.2 グリーン関手 $\text{C}\Omega(-, S)$ は Ω_S と同型である. すなわち, 命題 2.1 における f_H , $H \leq G$, は環準同型である.

3 標準誘導公式

$X = (X, \text{con}, \text{res}, \text{ind})$ を k 上 G のマッキー関手とする. A を X の制限部分関手, すなわち, $A(H)$, $H \leq G$ は $X(H)$ の k 部分加群とし, A の共役写像と制限写像は con_H^g と res_K^H , ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, の制限とする. 誘導射 $\Theta^{X,A} : A_+ \rightarrow X$ は k 準同型の族 $\Theta_H^{X,A} : A_+(H) \rightarrow X(H)$, $H \leq G$ で, $\Theta_H^{X,A}([K, \sigma]) = \text{ind}_K^H(\sigma)$, $[K, \sigma] \in A_+(H)$ を満たすものとして定義される. 制限関手の射 $\Psi : X \rightarrow A_+$, すなわち, k 準同型の族 $\Psi_H : X(H) \rightarrow A_+(H)$, $H \leq G$ で, $\Psi_{gH} \circ \text{con}_H^g = \text{con}_{+H}^g \circ \Psi_H$, $\Psi_K \circ \text{res}_K^H = \text{res}_{+K}^H \circ \Psi_H$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, を満たすものが X に関する A からの標準誘導公式であるとは, $\Theta^{X,A} \circ \Psi = \text{id}_X$ が成り立つことをいう ([4] 参照).

$\lambda : X \rightarrow A$ を共役関手の射, すなわち, k 準同型の族 $\lambda_H : X(H) \rightarrow A(H)$, $H \leq G$ で, $\lambda_{gH} \circ \text{con}_H^g = \text{con}_H^g \circ \lambda_H$, ここで $H \leq G$, $g \in G$, を満たすものとする. このとき, $(\lambda_K \circ \text{res}_K^H(x))_{K \leq H} \in A^+(H)$, ここで $H \leq G$, $x \in X(H)$, が成り立つ. $|G|$ が k における単数であるとき, 制限関手の射 $\Psi^{X,A,\lambda} : X \rightarrow A_+$ は k 準同型の族 $\Psi_H^{X,A,\lambda} : X(H) \rightarrow A_+(H)$, $H \leq G$ で,

$$\begin{aligned} \Psi_H^{X,A,\lambda}(x) &= \frac{1}{|H|} \eta_H^A((\lambda_K \circ \text{res}_K^H(x))_{K \leq H}) \\ &= \frac{1}{|H|} \sum_{K \leq H} \sum_{U \leq K} |U| \mu(U, K) [U, \text{res}_U^K \circ \lambda_K \circ \text{res}_K^H(x)], \quad x \in X(H) \end{aligned}$$

を満たすものとして定義される.

X の部分制限関手 $\mathcal{K}^X = (\mathcal{K}^X, \text{con}, \text{res})$ を

$$\mathcal{K}^X(H) = \bigcap_{K < H} \{x \in X(H) \mid \text{res}_K^H(x) = 0\}, \quad H \leq G$$

により定義する. G の部分群 H が X に関して coprimordial であるとは, $\mathcal{K}^X(H) \neq \{0\}$ を満たすことをいう ([4] 参照). そのような G の部分群の集合を $\mathcal{C}(X)$ で表す.

命題 3.1 ([4]) X を k 上 G のマッキー関手とし, A を X の制限部分関手とする. $|G|$ が k における単数であるとし, $\lambda: X \rightarrow A$ を共役関手の射とする. このとき, 次の 2 条件は同値である:

- (1) $\Psi^{X,A,\lambda}$ は X に関する A からの標準誘導公式である;
- (2) 任意の $H \in \mathcal{C}(X)$, $x \in X(H)$ に対して

$$\frac{1}{|H|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) \text{ind}_K^H \circ \text{res}_K^H (\lambda_H(x) - x) = 0.$$

次に, X を k 上 $\text{Stab}(G; S)$ のマッキー束とする. G の部分群 H が X に関して coprimordial であるとは, ある $s \in C_S(H)$ に対して $\mathcal{K}^{X_s}(H) \neq \{0\}$ であることをいう. X に関して coprimordial である G の部分群の集合を $\mathcal{C}(X)$ で表す. \mathcal{K}^{X_s} , $s \in S$ で構成される k 上 $\text{Stab}(G; S)$ の制限束を \mathcal{K}^X で表す.

命題 3.2 ([16]) X を k 上 $\text{Stab}(G; S)$ のマッキー束とする. $|G|$ が k における単数であるとき, 任意の $H \leq G$ に対して, $\mathcal{K}^{X_s}(H) = (\mathcal{K}^X)_s(H)$ が成り立つ. 特に, $\mathcal{C}(X_S) = \mathcal{C}(X)$ である.

4 + 構成の基本定理

A を k 上 G の制限関手とする. A の安定 k 基底とは, $A(H)$ の k 基底の族 $\mathcal{B} = \{\mathcal{B}(H)\}_{H \leq G}$ で, $\mathcal{B}(^g H) = \{\text{con}_H^g(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{B}(H)\}$, ここで $H \leq G$, $g \in G$, を満たすものをいう ([4] 参照). \mathcal{B} を A の安定 k 基底とする. $H \leq G$ とし,

$$\mathfrak{S}(H, \mathcal{B}) = \{(K, \sigma) \mid K \leq H, \sigma \in \mathcal{B}(K)\}$$

とおく. このとき, $\mathfrak{S}(H, \mathcal{B})$ の上への H の作用が

$$h.(K, \sigma) = ({}^h K, \text{con}_K^h(\sigma)), \quad h \in H, (K, \sigma) \in \mathfrak{S}(H, \mathcal{B})$$

により与えられる. $\mathfrak{R}(H, \mathcal{B})$ を $\mathfrak{S}(H, \mathcal{B})$ における H 軌道の完全代表系とする.

補題 4.1 ([4]) A を k 上 G の制限関手とし, \mathcal{B} を A の安定 k 基底とする. 各 $H \leq G$ に対して, $\{[K, \sigma] \mid (K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})\}$ は $A_+(H)$ の k 基底を成す.

以下, $k = \mathbb{Z}$, A を \mathbb{Z} 上 G の制限関手, \mathcal{B} を A の安定 \mathbb{Z} 基底とする. $H \leq G$ とし,

$$\mathcal{G}_A(H) = \coprod_{(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})} \mathbb{Z}$$

とおく. $K \leq H$, $\chi \in A(K)$ に対して, $\langle \chi, \sigma \rangle$, $\sigma \in \mathcal{B}(K)$ を

$$\chi = \sum_{\sigma \in \mathcal{B}(K)} \langle \chi, \sigma \rangle \sigma$$

により定義する. \mathbb{Z} 加群準同型 $\varphi_{A,H} : A_+(H) \rightarrow \mathcal{G}_A(H)$ を

$$\varphi_{A,H}([K, \sigma]) = \left(\sum_{hK \in H/K, U \leq hK} \langle \text{res}_U^{hK} \circ \text{con}_K^h(\sigma), \tau \rangle \right)_{(U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})}, \quad (K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})$$

により定義し, バーンサイド準同型と呼ぶ. 命題 1.2 より, $\varphi_{A,H}$ は単射である.

$(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})$ に対して, $N_H(K, \sigma)$ を H における (K, σ) の安定化群とし, $W_H(K, \sigma) = N_H(K, \sigma)/K$ とおく.

補題 4.2 ([16]) $(K, \sigma), (U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})$ とする. 任意の $Q \leq W_H(U, \tau)$ に対して,

$$\sum_{\tau U \in Q} \sum_{hK \in H/K, \langle \tau \rangle U \leq hK} \langle \text{res}_U^{hK} \circ \text{con}_K^h(\sigma), \tau \rangle \equiv 0 \pmod{|Q|}$$

が成り立つ.

群 $\text{Obs}_A(H)$ を次のように定義する:

$$\text{Obs}_A(H) = \coprod_{(U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})} \mathbb{Z}/|W_H(U, \tau)|\mathbb{Z}.$$

$(U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})$, $(x_{(K, \sigma)})_{(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H)$ に対して, $x_{h \cdot (U, \tau)} = x_{(U, \tau)}$, $h \in H$ と定める. \mathbb{Z} 加群準同型 $\psi_{(U, \tau)} : \mathcal{G}_A(H) \rightarrow \mathbb{Z}/|W_H(U, \tau)|\mathbb{Z}$, $(U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})$, は

$$\begin{aligned} \psi_{(U, \tau)}((x_{(K, \sigma)})_{(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})}) \\ \equiv \sum_{\substack{\tau U \in W_H(U, \tau), \\ \nu \in \mathcal{B}(\langle \tau \rangle U)}} x_{(\langle \tau \rangle U, \nu)} \cdot \langle \text{res}_U^{\langle \tau \rangle U}(\nu), \tau \rangle \pmod{|W_H(U, \tau)|}, \\ (x_{(K, \sigma)})_{(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H) \end{aligned}$$

により定義される. \mathbb{Z} 加群準同型 $\psi_{A,H} : \mathcal{G}_A(H) \rightarrow \text{Obs}_A(H)$ を

$$\begin{aligned} \psi_{A,H}((x_{(K, \sigma)})_{(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})}) = (\psi_{(U, \tau)}((x_{(K, \sigma)})_{(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})}))_{(U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})}, \\ (x_{(K, \sigma)})_{(K, \sigma) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H) \end{aligned}$$

により定義し, コーシー・フロベニウス準同型と呼ぶ.

次の定理は [20, Proposition 2.9] の一般化である ([7, Proposition 1.3.5], [13, Theorem 4.4], [15, Theorem 4.5], [19, Lemma 2.1] 参照).

定理 4.3 (第 1 基本定理 [16]) 次の \mathbb{Z} 加群の列は完全である.

$$0 \longrightarrow A_+(H) \xrightarrow{\varphi_{A,H}} \mathcal{G}_A(H) \xrightarrow{\psi_{A,H}} \text{Obs}_A(H) \longrightarrow 0$$

\mathbb{Z} 加群準同型 $\xi_{(U,\tau)} : \mathcal{G}_A(H) \rightarrow \mathbb{Z}/|W_H(U,\tau)|\mathbb{Z}$, $(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})$, は

$$\begin{aligned} \xi_{(U,\tau)} \left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \right) \\ \equiv \sum_{(K,\sigma) \in \mathfrak{S}(H,\mathcal{B})_{\geq(U,\tau)}} \mu(U,K) x_{(K,\sigma)} \cdot \langle \text{res}_U^K(\sigma), \tau \rangle \pmod{|W_H(U,\tau)|}, \end{aligned}$$

ここで $\mathfrak{S}(H,\mathcal{B})_{\geq(U,\tau)} = \{(K,\sigma) \in \mathfrak{S}(H,\mathcal{B}) \mid U \leq K, \langle \text{res}_U^K(\sigma), \tau \rangle \neq 0\}$, により定義される. \mathbb{Z} 加群準同型 $\xi_{A,H} : \mathcal{G}_A(H) \rightarrow \text{Obs}_A(H)$ を

$$\begin{aligned} \xi_{A,H} \left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \right) &= (\xi_{(U,\tau)} \left((x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \right))_{(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})}, \\ &\quad (x_{(K,\sigma)})_{(K,\sigma) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} \in \mathcal{G}_A(H) \end{aligned}$$

により定義する.

次の定理は [6, Corollary 4.2] の類似である ([9, Theorem 1.1], [13, Corollary 5.3], [20, Theorem 8.3] 参照).

定理 4.4 (第 2 基本定理) 次の \mathbb{Z} 加群の列は完全である.

$$0 \longrightarrow A_+(H) \xrightarrow{\varphi_{A,H}} \mathcal{G}_A(H) \xrightarrow{\xi_{A,H}} \text{Obs}_A(H) \longrightarrow 0$$

5 整数係数標準誘導公式

X を \mathbb{Z} 上 G のマッキー関手とし, A を X の制限部分関手とする. X を \mathbb{Q} 上のマッキー関手に線形に拡張し, A を \mathbb{Q} 上の制限関手に線形に拡張する.

$\lambda : X \rightarrow A$ を共役関手の射とし, \mathcal{B} を A の安定 \mathbb{Z} 基底とする. 制限関手の射 $\Psi^{X,A,\lambda} : \mathbb{Q}X \rightarrow \mathbb{Q}A_+$ が \mathbb{Q} 線形写像の族 $\Psi_H^{X,A,\lambda} : \mathbb{Q}X(H) \rightarrow \mathbb{Q}A_+(H)$, $H \leq G$ で,

$$\Psi_H^{X,A,\lambda}(x) = \frac{1}{|H|} \eta_H^A((\lambda_K \circ \text{res}_K^H(x))_{K \leq H}), \quad x \in X(H) \quad (\text{I})$$

を満たすものとして定義される. 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\Psi_H^{X,A,\lambda}(x) = \sum_{(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,\mathcal{B})} m_\tau(x) [U, \tau], \quad x \in X(H),$$

ここで

$$m_\tau(x) = \frac{1}{|W_H(U,\tau)|} \sum_{(K,\sigma) \in \mathfrak{S}(H,\mathcal{B})_{\geq(U,\tau)}} \mu(U,K) \langle \lambda_K \circ \text{res}_K^H(x), \sigma \rangle \cdot \langle \text{res}_U^K(\sigma), \tau \rangle,$$

が成り立つ. $\Psi_H^{X,A,\lambda}(x) \in A_+(H)$, ここで $H \leq G$, $x \in X(H)$, ならば, $\Psi^{X,A,\lambda}$ を \mathbb{Z} 加群準同型の族 $\Psi_H^{X,A,\lambda}: X(H) \rightarrow A_+(H)$, $H \leq G$ で, (I) を満たすものとして定義される制限関手の射 $\Psi^{X,A,\lambda}: X \rightarrow A_+$ とみなす.

定理 4.3 は次の定理の証明に応用される.

定理 5.1 ([4]) X を \mathbb{Z} 上 G のマッキー関手とし, A を X の制限部分関手とする. $\lambda: X \rightarrow A$ を共役関手の射とし, B を A の安定 \mathbb{Z} 基底とする. さらに, 条件

$$\langle \lambda_U \circ \text{res}_U^H(x), \tau \rangle = \sum_{\sigma \in B(K)} \langle \lambda_K \circ \text{res}_K^H(x), \sigma \rangle \cdot \langle \text{res}_U^K(\sigma), \tau \rangle, \quad x \in X(H) \quad (\text{II})$$

が, K/U は巡回群であり, $r \in K$ ならば $\text{con}_U^r(\tau) = \tau$ となっているような, 任意の $U \trianglelefteq K \leq H \leq G$, $\tau \in B(U)$ について満たされているとする. このとき, 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\sum_{(U,\tau) \in \mathfrak{R}(H,B)} m_\tau(x)[U, \tau] \in A_+(H), \quad x \in X(H)$$

が成り立つ.

系 5.2 ([4]) 定理 5.1 の仮定のもとで, 任意の $H \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}X)$ に対して,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) \text{ind}_K^H \circ \text{res}_K^H(\lambda_H(x) - x) = 0, \quad x \in X(H)$$

が成り立つとする. このとき, $\Psi^{X,A,\lambda}$ は X に関する A からの標準誘導公式である.

以下, この節では次を仮定する.

- (i) S は G モノイド.
- (ii) X は \mathbb{Z} 上 $\text{Stab}(G; S)$ のマッキー束.
- (iii) A は \mathbb{Z} 上 $\text{Stab}(G; S)$ の制限束で, 各 $s \in S$ に対して, A_s は X_s の制限部分関手であり, 斜共役写像 con_s^g , ここで $H \leq G_s$, $g \in G$, は X の斜共役写像 con_s^g の制限である.
- (iv) $\lambda_s: X_s \rightarrow A_s$, $s \in S$, は共役関手の射であり, 次を満たす:

$$\text{con}_s^g \circ \lambda_{sH} = \lambda_{gsH} \circ \text{con}_s^g, \quad s \in S, \quad H \leq G_s, \quad g \in G.$$

- (v) 各 $s \in S$ に対して, B_s は安定 \mathbb{Z} 基底であり, 次を満たす:

$$B_{gs}({}^gH) = \{\text{con}_s^g(\sigma_s) \mid \sigma_s \in B_s(H)\}, \quad H \leq G_s, \quad g \in G.$$

仮定から, 斜制限関手 A_S は斜マツキー関手 X_S の制限部分関手である. 共役関手の射 $\lambda_S : X_S \rightarrow A_S$ を \mathbb{Z} 加群準同型の族 $\lambda_{SH} : X_S(H) \rightarrow A_S(H)$, $H \leq G$ で,

$$\lambda_{SH}((x(s))_{s \in S}) = (y_H(s))_{s \in S}, \quad (x(s))_{s \in S} \in X_S(H),$$

ここで, $s \in C_S(H)$ の場合 $y_H(s) = \lambda_{sH}(x(s))$, その他の場合 $y_H(s) = 0$, を満たすものとして定義する. A_S の安定 \mathbb{Z} 基底 \mathcal{B}_S を $A_S(H)$ の \mathbb{Z} 基底の族 $\mathcal{B}_S(H)$, $H \leq G$ で,

$$\mathcal{B}_S(H) = \{(\delta_{st}\sigma_s)_{t \in S} \in A_S(H) \mid s \in C_S(H), \sigma_s \in \mathcal{B}_s(H)\}$$

を満たすものとして定義する.

命題 5.3 ([16]) K/U は巡回群であり, $r \in K$ ならば $\text{con}_s r_U(\tau_s) = \tau_s$ となっているような, 任意の $U \trianglelefteq K \leq H \leq G$, $s \in C_S(H)$, $\tau_s \in \mathcal{B}_s(U)$ について, 条件

$$\langle \lambda_{sU} \circ \text{res}_U^H(x), \tau_s \rangle = \sum_{\sigma_s \in \mathcal{B}_s(K)} \langle \lambda_{sK} \circ \text{res}_K^H(x), \sigma_s \rangle \cdot \langle \text{res}_U^K(\sigma_s), \tau_s \rangle, \quad x \in X_s(H)$$

が満たされているとする. 任意の $H \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}X)$, $s \in C_S(H)$ に対して,

$$\frac{1}{|H|} \sum_{K \leq H} |K| \mu(K, H) \text{ind}_K^H \circ \text{res}_K^H(\lambda_{sH}(x) - x) = 0, \quad x \in X_s(H)$$

が成り立つならば, $\Psi^{X_S, A_S, \lambda_S}$ は X_S に関する A_S からの標準誘導公式であり, 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\Psi_H^{X_S, A_S, \lambda_S}((x(s))_{s \in S}) = \sum_{(U, \tau) \in \mathfrak{A}(H, \mathcal{B}_S)} m_\tau((x(s))_{s \in S}) [U, \tau], \quad (x(s))_{s \in S} \in X_S(H),$$

ここで

$$m_\tau((x(s))_{s \in S}) = \frac{1}{|W_H(U, \tau)|} \sum_{(K, \sigma) \in \mathfrak{S}(H, \mathcal{B}_S) \geq (U, \tau)} \mu(U, K) \\ \times \langle \lambda_{sK} \circ \text{res}_K^H((x(s))_{s \in S}), \sigma \rangle \cdot \langle \text{res}_U^K(\sigma), \tau \rangle,$$

が成り立つ.

6 捻れ群環の表現における誘導定理

以後, 単に加群というときには, 左加群を意味する. $\alpha : G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は標準化された 2 コサイクル, すなわち,

$$\alpha(rs, t)\alpha(r, s) = \alpha(r, st)\alpha(s, t), \quad r, s, t \in G$$

であり, s または t が単位元である限り, $\alpha(s, t) = 1$ であるとする. 各 $H \leq G$ に対して, $\mathbb{C}^\alpha H$ により, 基底が $\{\bar{s}\}_{s \in H}$ で与えられ, 積が $\bar{s}\bar{t} = \alpha(s, t)\overline{st}$, $s, t \in H$ で与えられる \mathbb{C} 代数を表し, それを捻れ群環と呼ぶ. \mathbb{C} の標数が $|G|$ を割らなければ, $\mathbb{C}^\alpha H$, $H \leq G$, は半単純環である ([10] 参照).

$R_\alpha(H)$, $H \leq G$, を有限生成 $\mathbb{C}^\alpha H$ 加群の同型類の \mathbb{Z} 線形結合からなり, 直和を加法とする加法群とする. $R_\alpha = (R_\alpha, \text{con}, \text{res}, \text{ind})$ により, 通常のコ役, 制限, 誘導写像をもつマッキー関手を表す ([2] 参照). これを $\mathbb{C}^\alpha G$ 表現関手と呼ぶ.

補題 6.1 ([16]) $U \trianglelefteq K \leq G$ とし, K/U は巡回群であると仮定する. N を 1 次元 $\mathbb{C}^\alpha U$ 加群 とし, $r \in K$ ならば N は $\text{con}_U^r(N)$ と同型であるとする. M が既約 $\mathbb{C}^\alpha K$ 加群であり, N が $\text{res}_U^K(M)$ の組成因子ならば, N は $\text{res}_U^K(M)$ と同型である.

各 $H \leq G$ に対して, $\text{Irr}_\alpha(H)$ を既約 $\mathbb{C}^\alpha H$ 加群の同型類全体の集合とし, $\text{Lin}_\alpha(H)$ を 1 次元 $\mathbb{C}^\alpha H$ 加群の同型類全体の集合とする. R_α^{ab} により $\mathbb{C}^\alpha G$ 表現関手 R_α の制限部分関手で, $R_\alpha^{\text{ab}}(H)$, $H \leq G$, が \mathbb{Z} 上 $\text{Lin}_\alpha(H)$ で張られるものを表し, コ役関手の射 $\lambda^\alpha : R_\alpha \rightarrow R_\alpha^{\text{ab}}$ を \mathbb{Z} 加群準同型の族 $\lambda_H^\alpha : R_\alpha(H) \rightarrow R_\alpha^{\text{ab}}(H)$, $H \leq G$ で

$$\lambda_H^\alpha(\chi) = \begin{cases} \chi, & \chi \in \text{Lin}_\alpha(H) \text{ の場合,} \\ 0, & \chi \in \text{Irr}_\alpha(H) - \text{Lin}_\alpha(H) \text{ の場合} \end{cases}$$

を満たすものとして定義する. R_α^{ab} の安定 \mathbb{Z} 基底 \mathcal{B}^α を $\mathcal{B}^\alpha(H) = \text{Lin}_\alpha(H)$, $H \leq G$ により定義する. 補題 6.1 より, 定理 5.1 における条件 (II) が $X = R_\alpha$, $A = R_\alpha^{\text{ab}}$, $\lambda = \lambda^\alpha$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^\alpha$ に対して成り立つ. また, $\mathcal{C}(\mathbb{Q}R_\alpha)$ は G の巡回部分群の集合であり ([16]), 任意の $H \in \mathcal{C}(\mathbb{Q}R_\alpha)$ に対して, $R_\alpha^{\text{ab}}(H) = R_\alpha(H)$ と $\lambda_H^\alpha = \text{id}_{R_\alpha(H)}$ が成り立つ. これより, 系 5.2 から, $\Psi^{R_\alpha, R_\alpha^{\text{ab}}, \lambda^\alpha}$ は R_α に関する R_α^{ab} からの標準誘導公式であり, 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\Psi_H^{R_\alpha, R_\alpha^{\text{ab}}, \lambda^\alpha}(\chi) = \sum_{(U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B}^\alpha)} m_\tau^\alpha(\chi)[U, \tau], \quad \chi \in R_\alpha(H),$$

ここで

$$m_\tau^\alpha(\chi) = \frac{1}{|W_H(U, \tau)|} \sum_{(K, \sigma) \in \mathfrak{S}(H, \mathcal{B}^\alpha)_{\geq (U, \tau)}} \mu(U, K) \langle \lambda_K^\alpha \circ \text{res}_K^H(\chi), \sigma \rangle,$$

が成り立つ. 特に, 次の結果を得る.

命題 6.2 ([3, 16]) 上記の記号の元で, 次が成り立つ:

$$\chi = \sum_{(U, \tau) \in \mathfrak{R}(G, \mathcal{B}^\alpha)} m_\tau^\alpha(\chi) \text{ind}_U^G(\tau), \quad \chi \in R_\alpha(G).$$

7 有限群の twisted quantum double の表現における誘導定理

$(\mathbb{C}G)^*$ を群環 $\mathbb{C}G$ から \mathbb{C} への \mathbb{C} 線形写像全体とする. 任意の $f_1, f_2 \in (\mathbb{C}G)^*$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して, $(c_1 f_1 + c_2 f_2)(g) = c_1 f_1(g) + c_2 f_2(g)$, $(f_1 f_2)(g) = f_1(g) f_2(g)$ と定め, $(\mathbb{C}G)^*$ を \mathbb{C} 代数と考える. 各 $s \in G$ に対して, $\phi_s \in (\mathbb{C}G)^*$ を, $s \neq g \in G$ の場合に $\phi_s(g) = 0$, $\phi_s(s) = 1$ と定める. このとき, $\{\phi_s \mid s \in G\}$ は $(\mathbb{C}G)^*$ の \mathbb{C} 基底を成す. $\omega : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}^\times$ は標準化された 3 コサイクル, すなわち,

$$\omega(g, r, s) \omega(g, rs, t) \omega(r, s, t) = \omega(gr, s, t) \omega(g, r, st), \quad g, r, s, t \in G$$

であり, g, r あるいは s が単位元である限り $\omega(g, r, s) = 1$ であるとする. ω に関する G の twisted quantum double $D^\omega(G)$ はベクトル空間 $(\mathbb{C}G)^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}G$ において

$$\begin{aligned} \text{積} \quad (\phi_s \otimes g)(\phi_t \otimes r) &= \theta_s(g, r) \phi_s \phi_{st} \otimes gr, \\ \text{余積写像} \quad \Delta(\phi_r \otimes g) &= \sum_{s, t \in G, st=r} \gamma_g(s, t) (\phi_s \otimes g) \otimes (\phi_t \otimes g), \end{aligned}$$

ここで

$$\theta_s(g, r) = \frac{\omega(s, g, r) \omega(g, r, (gr)^{-1}s)}{\omega(g, g^{-1}s, r)}, \quad \gamma_s(g, r) = \frac{\omega(g, r, s) \omega(s, s^{-1}g, s^{-1}r)}{\omega(g, s, s^{-1}r)},$$

を与えて定義される準三角準ホップ代数である ([8, 11, 12, 17] 参照).

各 $H \leq G$ に対して, $D^\omega(G)$ の部分代数 $D_G^\omega(H)$ を

$$D_G^\omega(H) = \sum_{s \in G, h \in H} \mathbb{C} \phi_s \otimes h$$

により定義する. 各 $h \in H$ は $\sum_{s \in G} \phi_s \otimes h \in D_G^\omega(H)$ と同一視され, $(\mathbb{C}G)^*$ は $D_G^\omega(H)$ の部分代数 $(\mathbb{C}G)^* \otimes \epsilon$, ここで ϵ は G の単位元, と同一視される.

$RD_G^\omega(H)$, $H \leq G$, を有限生成 $D_G^\omega(H)$ 加群の同型類の \mathbb{Z} 線形結合からなり, 直和を加法とする加法群とする. $RD_G^\omega = (RD_G^\omega, \text{Dcon}, \text{Dres}, \text{Dind})$ により, 通常の共役, 制限, 誘導写像をもつマッキー関手を表す ([2] 参照). これを $D^\omega(G)$ 表現関手と呼ぶ.

$H \leq G$, $s \in G$ とする. $g, r, t \in H_s$ ならば

$$\theta_s(g, r) = \gamma_s(g, r) = \frac{\omega(s, g, r) \omega(g, r, s)}{\omega(g, s, r)}, \quad \theta_s(tg, r) \theta_s(t, g) = \theta_s(t, gr) \theta_s(g, r)$$

が成り立つ. このように

$$\theta_s : H_s \times H_s \rightarrow \mathbb{C}^\times, \quad (g, r) \mapsto \theta_s(g, r)$$

は標準化された 2 コサイクルである.

G^c を G が共役 r_s , ここで $r, s \in G$, により作用する G モノイド G とし, $\overline{H \setminus G^c}$ を G^c における H 軌道の完全代表系とする.

各 $s \in G^c$ に対して, $D_G^\omega(H)$ の両側イデアル $D_s^\omega(H)$ を

$$D_s^\omega(H) = \sum_{rH_s \in H/H_s} \sum_{h \in H} \mathbb{C} \phi_{r_s} \otimes h$$

により定義する. $D_G^\omega(H)$ は $D_s^\omega(H)$, $s \in \overline{H \setminus G^c}$ の直和で表され, 任意の $D_G^\omega(H)$ 加群 M は部分加群 $D_s^\omega(H)M$, $s \in \overline{H \setminus G^c}$ の直和で表される. 任意の $D_s^\omega(H)$ 加群, $s \in G^c$, は $D_G^\omega(H)$ 加群とみなされる.

$s \in G^c$ とし, $D_s^\omega(H)$ の左イデアル $E_s^\omega(H)$ を

$$E_s^\omega(H) = \sum_{h \in H} \mathbb{C} \phi_{h_s} \otimes h$$

により定義する. 捻れ群環 $\mathbb{C}^{\theta_s} H_s$ を $E_s^\omega(H)$ の部分空間とみなし, $\bar{h} \in \mathbb{C}^{\theta_s} H_s$, $h \in H_s$ を $\phi_s \otimes h \in E_s^\omega(H)$ と同一視する. このとき, $E_s^\omega(H)$ は右 $\mathbb{C}^{\theta_s} H_s$ 加群と考えられる. また, $D_G^\omega(H)$ 加群 M に対して, $\phi_s M := \{\phi_s x \mid x \in M\}$ を左 $\mathbb{C}^{\theta_s} H_s$ 加群と考える.

準備として, いくつか補題を述べる.

補題 7.1 ([16]) $H \leq G$, $s \in G^c$ に対して $\mathbb{C}^{\theta_s} H_s$ 加群の圏 $\mathbb{C}^{\theta_s} H_s\text{-mod}$ と $D_s^\omega(H)$ 加群の圏 $D_s^\omega(H)\text{-mod}$ の間の圏同値が, 関手

$$\zeta_{H,s}^1 : \mathbb{C}^{\theta_s} H_s\text{-mod} \rightarrow D_s^\omega(H)\text{-mod}, \quad N \mapsto E_s^\omega(H) \otimes_{\mathbb{C}^{\theta_s} H_s} N,$$

$$\zeta_{H,s}^2 : D_s^\omega(H)\text{-mod} \rightarrow \mathbb{C}^{\theta_s} H_s\text{-mod}, \quad M \mapsto \phi_s M$$

により与えられる.

以下, 補題 7.1 における記号を用いる. $s \in G^c$, $g \in G$ とする. $H \leq G_s$ のとき, $N \in \mathbb{C}^{\theta_s} H\text{-mod}$ に対して, $\text{con}_s^g(N) \in \mathbb{C}^{\theta_{gs}} gH$ を

$$\begin{aligned} \text{con}_s^g(N) &= \zeta_{gH,gs}^2 \circ \text{Dcon}_H^g \circ \zeta_{H,s}^1(N) \\ &= (\phi_{gs} \otimes g) \otimes_{D_G^\omega(H)} (E_s^\omega(H) \otimes_{\mathbb{C}^{\theta_s} H} N), \end{aligned}$$

ここで $\text{Dcon}_H^g \circ \zeta_{H,s}^1(N) \in D_{gs}^\omega(gH)\text{-mod}$ と考えている, により定義する.

$H \leq G$, $M \in D_G^\omega(H)\text{-mod}$ に対して, 写像

$$\begin{aligned} \phi_{gs} \text{Dcon}_H^g(M) &= (\phi_{gs} \otimes g) \otimes_{D_G^\omega(H)} M \rightarrow \text{con}_s^g(\phi_s M), \\ (\phi_{gs} \otimes g) \otimes x &\mapsto (\phi_{gs} \otimes g) \otimes (\phi_s \otimes \phi_s x) \end{aligned}$$

は $\mathbb{C}^{\theta_{gs}} gH_{gs}$ 加群同型である. このことから, 次の補題の (b) が示される.

補題 7.2 ([16]) $H \leq G$, $s \in G^c$, $h \in H$ とする.

(a) 任意の $N \in \mathbb{C}^{\theta_s} H_s\text{-mod}$ に対して, 次の $D_G^{\omega}(H)$ 加群同型がある:

$$\zeta_{H,s}^1(N) \cong \zeta_{H,h_s}^1 \circ \text{con}_{H_s}^h(N).$$

(b) 任意の $M \in D_G^{\omega}(H)\text{-mod}$ に対して, 次の $\mathbb{C}^{\theta_{h_s}} H_{h_s}$ 加群同型がある:

$$\phi_{h_s} M \cong \text{con}_{H_s}^h(\phi_s M).$$

$s \in G^c$, $H \leq G_s$, $N \in \mathbb{C}^{\theta_s} H\text{-mod}$ に対して, $[N]$ は N を含む同型類を表す. \mathbb{Z} 加群準同型 $\text{con}_{sH}^g : R(\mathbb{C}^{\theta_s} H) \rightarrow R(\mathbb{C}^{\theta_{gs}} gH)$, ここで $s \in G^c$, $H \leq G_s$, $g \in G$, を

$$\text{con}_{sH}^g([N]) = [\text{con}_{sH}^g(N)] = [\zeta_{gH,s}^2 \circ \text{Dcon}_H^g \circ \zeta_{H,s}^1(N)], \quad N \in \mathbb{C}^{\theta_s} H\text{-mod}$$

により定め, 斜共役写像と呼ぶ.

補題 7.3 ([16]) マッキー関手の集まり $R_s^{\theta} := R_{\theta_s} = (R_{\theta_s}, \text{con}, \text{res}, \text{ind})$, $s \in G^c$ と斜共役写像 $\text{con}_{sH}^g : R(\mathbb{C}^{\theta_s} H) \rightarrow R(\mathbb{C}^{\theta_{gs}} gH)$, ここで $s \in G^c$, $H \leq G_s$, $g \in G$, は \mathbb{Z} 上 $\text{Stab}(G; G^c)$ のマッキー束 R^{θ} を定める.

$H \leq G$, $M \in D_G^{\omega}(H)\text{-mod}$ に対して $[M]$ は M を含む同型類を表す. 補題 7.2 より, 各 $H \leq G$ に対して, \mathbb{Z} 加群準同型

$$\Gamma_H : RD_G^{\omega}(H) \rightarrow R_{G^c}^{\theta}(H), \quad [M] \mapsto ([\phi_s M])_{s \in G^c} = ([\zeta_{H,s}^2(D_s^{\omega}(H)M)])_{s \in G^c},$$

$$\Gamma'_H : R_{G^c}^{\theta}(H) \rightarrow RD_G^{\omega}(H), \quad ([N(s)])_{s \in G^c} \mapsto \sum_{s \in \overline{H \setminus G^c}} [\zeta_{H,s}^1(N(s))]$$

が存在する. 補題 7.1 より, $\Gamma_H^{-1} = \Gamma'_H$ である.

定理 7.4 ([16]) マッキー関手 RD_G^{ω} は $R_{G^c}^{\theta}$ と同型である. 実際, 上の記号のもとで, \mathbb{Z} 加群同型の族 $\Gamma_H : RD_G^{\omega}(H) \rightarrow R_{G^c}^{\theta}(H)$, $H \leq G$, は $\Gamma_{gH} \circ \text{Dcon}_H^g = \text{con}_{G^c H}^g \circ \Gamma_H$, $\Gamma_K \circ \text{Dres}_K^H = \text{res}_{G^c K}^H \circ \Gamma_H$, $\Gamma_H \circ \text{Dind}_K^H = \text{ind}_{G^c K}^H \circ \Gamma_K$, ここで $K \leq H \leq G$, $g \in G$, を満たし, マッキー関手の同型 $\Gamma : RD_G^{\omega} \rightarrow R_{G^c}^{\theta}$ を定める.

各 $H \leq G$ に対して, $D_G^{\omega}(H)\text{-mod}$ を $D_G^{\omega}(H)$ 加群の同型類全体の集合として,

$$\text{Irr}(D_G^{\omega}(H)) = \left\{ [M] \in D_G^{\omega}(H)\text{-mod} \mid \begin{array}{l} [\phi_s M] \in \text{Irr}_{\theta_s}(H_s) \text{ である } s \in \overline{H \setminus G^c} \text{ が} \\ \text{存在し, } s \neq t \in \overline{H \setminus G^c} \text{ ならば } \phi_t M = \{0\}. \end{array} \right\},$$

$$\text{Lin}(D_G^{\omega}(H)) = \left\{ [N] \in D_G^{\omega}(H)\text{-mod} \mid \begin{array}{l} \dim_{\mathbb{C}}(\phi_s N) = 1 \text{ である } s \in \overline{H \setminus G^c} \text{ が} \\ \text{存在し, } s \neq t \in G^c \text{ ならば } \phi_t N = \{0\}. \end{array} \right\}$$

とおく. 定理 7.4 より, $D_G^\omega(H)$, $H \leq G$, は半単純代数であり, $\text{Irr}(D_G^\omega(H))$ は既約 $D_G^\omega(H)$ 加群の同型類全体の集合である. $R^{\text{ab}}D_G^\omega$ により RD_G^ω の制限部分関手で, $R^{\text{ab}}D_G^\omega(H)$, $H \leq G$, が \mathbb{Z} 上 $\text{Lin}(D_G^\omega(H))$ で張られるものを表す. 共役関手の射 $\lambda_G^\omega : RD_G^\omega \rightarrow R^{\text{ab}}D_G^\omega$ を \mathbb{Z} 加群準同型の族 $\lambda_{GH}^\omega : RD_G^\omega(H) \rightarrow R^{\text{ab}}D_G^\omega(H)$, $H \leq G$ で

$$\lambda_{GH}^\omega(\chi) = \begin{cases} \chi, & \chi \in \text{Lin}(D_G^\omega(H)) \text{ の場合,} \\ 0, & \chi \in \text{Irr}(D_G^\omega(H)) - \text{Lin}(D_G^\omega(H)) \text{ の場合} \end{cases}$$

を満たすものとして定義する. $R^{\text{ab}}D_G^\omega$ の安定 \mathbb{Z} 基底 \mathcal{B}_G^ω を $\mathcal{B}_G^\omega(H) = \text{Lin}(D_G^\omega(H))$, $H \leq G$ により定義する.

$H \leq G$, $(U, \tau) \in \mathfrak{R}(H, \mathcal{B}_G^\omega)$ に対して,

$$W_H(U, \tau) = \{hU \in N_H(U)/U \mid \text{Dcon}_U^h(\tau) = \tau\}$$

とおく. 命題 5.3 と定理 7.4 より, 次の定理が得られる.

定理 7.5 ([16]) $\Psi^{RD_G^\omega, R^{\text{ab}}D_G^\omega, \lambda_G^\omega}$ は RD_G^ω に関する $R^{\text{ab}}D_G^\omega$ からの標準誘導公式であり, 任意の $H \leq G$ に対して,

$$\Psi^{RD_G^\omega, R^{\text{ab}}D_G^\omega, \lambda_G^\omega}(\chi) = \sum_{(U, \tau) \in \mathfrak{R}(G, \mathcal{B}_G^\omega)} m_\tau^\omega(\chi)[U, \tau], \quad \chi \in RD_G^\omega(H),$$

ここで

$$m_\tau^\omega(\chi) = \frac{1}{|W_H(U, \tau)|} \sum_{(K, \sigma) \in \mathfrak{S}(H, \mathcal{B}_G^\omega)_{\geq (U, \tau)}} \mu(U, K) \langle \lambda_{GK}^\omega \circ \text{Dres}_K^H(\chi), \sigma \rangle$$

が成り立つ.

Brauer の誘導定理は次の様に一般化される.

系 7.6 ([16]) 定理 7.5 の記号のもとで, M を $D^\omega(G)$ 加群とする. このとき,

$$[M] = \sum_{(U, [N]) \in \mathfrak{R}(G, \mathcal{B}_G^\omega)} m_{[N]}^\omega([M])[D^\omega(G) \otimes_{D_G^\omega(U)} N]$$

が成り立つ.

系 7.6 の hyper elementary 版も証明される ([16] 参照).

参考文献

- [1] M. Aigner, Combinatorial theory, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 234, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.
- [2] P. R. Boisen, The representation theory of fully group-graded algebras, *J. Algebra* **151** (1992), 160–179.
- [3] R. Boltje, A canonical Brauer induction formula, *Astérisque*, **181–182** (1990), 31–59.
- [4] R. Boltje, A general theory of canonical induction formulae, *J. Algebra* **206** (1998), 293–343.
- [5] S. Bouc, Hochschild constructions for Green functors, *Comm. Algebra* **31** (2003), 403–436.
- [6] O. Coşkun and E. Yalçın, A Tate cohomology sequence for generalized Burnside rings. *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), 1306–1315.
- [7] T. tom Dieck, Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Mathematics, 766, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
- [8] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, and P. Roche, Quasi Hopf algebras, group cohomology and orbifold models, *Nuclear Phys. B (Proc. Suppl.)* **18B** (1990), 60–72.
- [9] R. Hartmann and E. Yalçın, Generalized Burnside rings and group cohomology, *J. Algebra* **310** (2007), 917–944.
- [10] G. Karpilovsky, Projective representations of finite groups, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 94, Marcel Dekker, Inc., New York, 1985.
- [11] C. Kassel, Quantum groups, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [12] G. Mason and Siu-Hung Ng, Group cohomology and gauge equivalence of some twisted quantum doubles. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 3465–3509.
- [13] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings I. The fundamental theorem, *J. Algebra* **236** (2001), 29–79.
- [14] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings II: The Dress construction of a Green functor, *J. Algebra* **282** (2004), 58–82.

- [15] Y. Takegahara, Multiple Burnside rings and Brauer induction formulae, *J. Algebra* **324** (2010), 1656–1686.
- [16] Y. Takegahara, On induction formulae for representations of the twisted quantum double of a finite group, submitted.
- [17] S. J. Witherspoon, The representation ring of the twisted quantum double of a finite group, *Canad. J. Math.* **48** (1996), 1324–1338.
- [18] T. Yoshida, On G -functors (I): transfer theorems for cohomological G -functors, *Hokkaido Math. J.* **9** (1980), 222–257.
- [19] T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, *J. Math. Soc. Japan* **42** (1990), 31–64.
- [20] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, *Hokkaido Math. J.* **19** (1990), 509–574.